

第4讲 二次函数的实际应用(练习)

一、面积问题

练习

1. 如图, 小区规划在一个长 $80m$, 宽 $40m$ 的长方形草坪上修建三条同样宽的甬道, 使其中两条与 AB 平行, 另一条与 BC 平行, 场地的其余部分种草, 甬道的宽度为 $a m$.



- (1) 用含 a 的代数式表示草坪的总面积 S ;
(2) 如果每一块草坪的面积都相等, 且甬道的宽为 $1m$, 那么每块草坪的面积是多少平方米?

【答案】 (1) $S = 2a^2 - 160a + 3200$

(2) 每一块草坪的面积是 $507m^2$.

【解析】 (1) $S = 80 \times 40 - (80a + 2 \times 40a - 2a^2) = 2a^2 - 160a + 3200$;

(2) 当 $a = 1$ 时, $S = 2 \times 1^2 - 160 \times 1 + 3200 = 3042m^2$

所以每一块草坪的面积为 $3042 \div 6 = 507m^2$

答: 每一块草坪的面积是 $507m^2$.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

2. 如图, 要设计一个等腰梯形的花坛, 花坛上底长 120 米, 下底长 180 米, 上下底相距 80 米, 在两腰中点连线(虚线)处有一条横向甬道, 上下底之间还有两条纵向甬道, 各甬道的宽度相等. 设甬道的宽为 x 米.



- (1) 用含 x 的式子表示横向甬道的面积为 _____ 平方米.
(2) 当三条甬道的面积是梯形面积的八分之一时, 求甬道的宽.

- (3) 根据设计的要求, 甬道的宽不能超过6米. 如果修建甬道的总费用(万元)与甬道的宽度成正比例关系, 比例系数是5.7, 花坛其余部分的绿化费用为每平方米0.02万元, 那么当甬道的宽度为多少米时, 所建花坛的总费用最少? 最少费用是多少万元?

【答案】 (1) $150x$

(2) 甬道的宽度为5米.

(3) 当 $x = 6$ 米时, 总费用最少, 最少费用为238.44万元.

【解析】 (1) 横向甬道的面积为: $\frac{120+180}{2}x = 150x$.

(2) 依题意得:

$$2 \times 80x + 150x - 2x^2 = \frac{1}{8} \times \frac{120+180}{2} \times 80,$$

整理得 $x^2 - 155x + 750 = 0$, 解得 $x_1 = 5$, $x_2 = 150$ (不符合题意, 舍去).

$\therefore$ 甬道的宽度为5米.

(3) 设建设花坛的总费用为 y 万元,

$$y = 0.02 \times \left[\frac{120+180}{2} \times 80 - (2 \times 80x + 150x - 2x^2) \right] + 5.7x = 0.04x^2 - 0.5x + 240$$

当 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{0.5}{2 \times 0.04} = 6.25$ 时, y 的值最小,

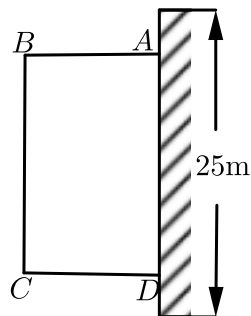
因为根据设计的要求, 甬道的宽不能超过6米,

$\therefore$ 当 $x = 6$ 米时, 总费用最少, 最少费用为: $0.04 \times 6^2 - 0.5 \times 6 + 240 = 238.44$ 万元.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

练习

3. 为了改善小区环境, 某小区决定要在—块一边靠墙(墙长25m)的空地上修建一个矩形绿化带 $ABCD$, 绿化带—边靠墙, 其它三边用总长为60米栅栏围住(如图), 若设绿化带的 BC 边长为 x 米, 绿化带的面积为 y 平方米.



- (1) 求 y 与 x 的函数关系式 .
- (2) 直接写出自变量的取值范围 .
- (3) 是否存在绿化带 BC 的长的某个值, 使得绿化带的面积为450平方米? 若存在, 求出这个值; 若不存在, 请说明理由 .

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$.

(2) $0 < x \leq 25$.

(3) 不存在, 证明见解析 .

【解析】 (1) 由题意得: $y = x \times \frac{60-x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$.

(2) 自变量 x 的取值范围是 $0 < x \leq 25$.

(3) 当绿化带的面积为450平方米时,

$$450 = -\frac{1}{2}x^2 + 30x ,$$

$$\text{解得: } x_1 = x_2 = 30 ,$$

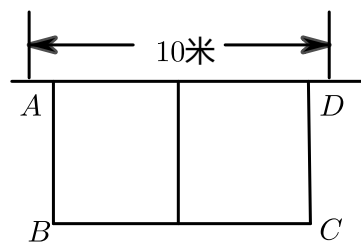
$$\because 0 < x \leq 25 ,$$

$$\therefore x = 30 \text{ 不和题意,}$$

当不存在绿化带 BC 的长的某个值, 使得绿化带的面积为450平方米 .

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

4. 如图, 有长为24米的篱笆, 一面利用墙(墙的最大可用长度为10米), 围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃, 设花圃的宽 AB 为 x 米, 面积为 S 米² .



- (1) 求 S 与 x 的函数关系式 .
- (2) 如果要围成面积为45m²的花圃, AB 的长是多少米?
- (3) 能围成面积比45m²更大的花圃吗? 如果能, 请求出最大面积, 并说明围法; 如果不能, 请说明理由 .

【答案】 (1) $S = -3x^2 + 24x$.

(2) 5m .

(3) 能, 当长为10m, 宽为 $\frac{14}{3}$ m时, 最大面积为 $\frac{140}{3}$ m².

【解析】(1) 根据题意, 得 $S = x(24 - 3x)$,

即所求的函数解析式为: $S = -3x^2 + 24x$.

(2) 根据题意, 设AB长为 x , 则BC长为 $24 - 3x$,

则 $-3x^2 + 24x = 45$.

整理, 得 $x^2 - 8x + 15 = 0$,

解得 $x = 3$ 或 5 ,

当 $x = 3$ 时, $BC = 24 - 9 = 15 > 10$ 不成立,

当 $x = 5$ 时, $BC = 24 - 15 = 9 < 10$ 成立,

$\therefore$ AB长为5m.

(3) $S = 24x - 3x^2 = -3(x - 4)^2 + 48$,

由于 $0 < 24 - 3x \leq 10$, 得 $\frac{14}{3} \leq x < 8$.

$\therefore \frac{14}{3} > 4$,

$\therefore$ 当 $x = \frac{14}{3}$ 时, S 取得最大值为 $\frac{140}{3} > 45$,

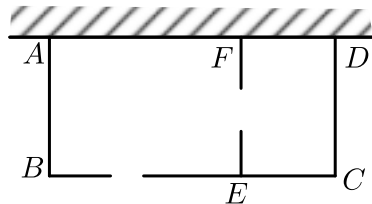
$\therefore$ 能围成面积比45m²更大的花圃,

当长为10m, 宽为 $\frac{14}{3}$ m时, 最大面积为 $\frac{140}{3}$ m².

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

练习

5. 一农户用篱笆及一面墙(该墙可用最大长度为36米)围成一个矩形场地ABCD, 该场地中间隔有一道与AB平行的篱笆(EF), 如图, BE、EF上各留有1米宽的门(门不需要篱笆), 该农户共用篱笆58米, 设该矩形的一边AB长 x 米, $AD > AB$, 矩形ABCD的面积为 S 平方米,



- (1) 求出 S 与 x 的函数关系式, 直接写出自变量 x 的取值范围.
(2) 若矩形ABCD的面积为252平方米, 求AB的长.
(3) 怎样围才能是围成的场地面积最大? 最大面积是多少?

【答案】(1) $S = -3x^2 + 60x (8 \leq x < 15)$.

(2) 14米 .

(3) 当 AB 长为10米时 , 围成的场地面积最大 , 最大面积为 300m^2 .

【解析】(1) 由题意得 : $BC - 1 = 58 - x - x - (x - 1)$,

$$\therefore BC = 60 - 3x ,$$

$$\therefore ABCD \text{ 的面积 : } S = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x ,$$

$$\therefore 60 - 3x \leq 36 , 60 - 3x > x ,$$

$$\therefore 8 \leq x < 15 , \text{ 即 } S = -3x^2 + 60x (8 \leq x < 15) .$$

(2) 由题意得 : $S = -3x^2 + 60x = 252$,

$$\text{解得 : } x = 14 \text{ 或 } 6 ,$$

$$\therefore \text{由第一问知 } 8 \leq x < 15 ,$$

$$\therefore x = 14 , \text{ 故 } AB \text{ 长为 } 14 \text{ 米} .$$

(3) $S = -3x^2 + 60x = -3(x - 10)^2 + 300$,

$$\therefore -3 < 0 ,$$

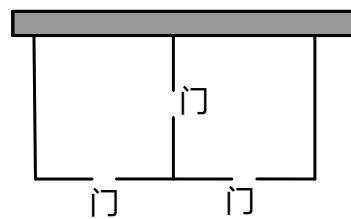
$\therefore$ 抛物线开口向下 , S 有最大值 ,

当 $x = 10$ 时 , S 取最大值 300 ,

故当 AB 长为10米时 , 围成的场地面积最大 , 最大面积为 300m^2 .

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

6. 某农场拟建两间矩形饲养室 , 一面靠现有墙 (墙足够长) , 中间用一道墙隔开 , 并在如图所示的三处各留1m宽的门 , 已知计划中的材料可建墙体 (不包括门) 的总长为27m , 求饲养室占地的最大面积是多少 .



【答案】 75m^2 .

【解析】 设垂直于墙的边长为 $x\text{m}$,

由题意可得面积 :

$$S = x(27 + 3 - 3x)$$

$$= x(30 - 3x)$$

$$= -3x^2 + 30x ,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2 \times (-3)} = 5,$$

当 $x = 5$ 时, $S_{\text{最大}} = 5 \times (30 - 3 \times 5) = 75$.

答: 饲养室占地的最大面积是 75m^2 .

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

二、利润问题

练习

7. 某商品的进价为每件20元, 售价为每件30元, 每个月可卖出180件; 如果每件商品的售价每上涨1元, 则每个月就会少卖出10件, 但每件售价不能高于35元, 设每件商品的售价上涨 x 元 (x 为整数), 每个月的销售利润为 y 元.
- (1) 求 y 与 x 的函数关系式, 并直接写出自变量 x 的取值范围;
 - (2) 每件商品的售价为多少元时, 每个月可获得最大利润? 最大利润是多少?
 - (3) 每件商品的售价定为多少元时, 每个月的利润恰好是1920元?

【答案】 (1) $y = -10x^2 + 80x + 1800$ ($0 \leq x \leq 5$, 且 x 为整数);

(2) 每件商品的售价为34元时, 商品的利润最大, 为1960元;

(3) 32元.

【解析】 (1) $y = (30 - 20 + x)(180 - 10x) = -10x^2 + 80x + 1800$ ($0 \leq x \leq 5$, 且 x 为整数);

(2) 由(1)知, $y = -10x^2 + 80x + 1800$ ($0 \leq x \leq 5$, 且 x 为整数).

$$\because -10 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时, $y = 1960$ 元;

$\therefore$ 每件商品的售价为34元.

答: 每件商品的售价为34元时, 商品的利润最大, 为1960元;

(3) $1920 = -10x^2 + 80x + 1800$

$$x^2 - 8x + 12 = 0,$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0,$$

解得 $x = 2$ 或 $x = 6$,

$$\because 0 \leq x \leq 5,$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore 30 + 2 = 32 \text{ (元)}$$

$\therefore$ 售价为32元时，利润为1920元.

【标注】【知识点】一元二次方程的利润问题

8. 某商品的进价为每件20元，售价为每件25元时，每天可卖出250件. 市场调查反映：如果调整价格，一件商品每涨价1元，每天要少卖出10件.

(1) 求出每天所得的销售利润 w (元) 与每件涨价 x (元) 之间的函数关系式.

(2) 求销售单价为多少元时，该商品每天的销售利润最大.

(3) 商场的营销部在调控价格方面，提出了A, B两种营销方案.

方案A：每件商品涨价不超过5元.

方案B：每件商品的利润至少为16元.

请比较哪种方案的最大利润更高，并说明理由.

【答案】 (1) $w = -10x^2 + 200x + 1250$ 或 $w = -10(x - 10)^2 + 2250 (0 \leq x \leq 25)$

(2) 销售单价为35元时，该商品每天的销售利润最大.

(3) 方案B最大利润更高.

【解析】 (1) 根据题意得： $w = (25 + x - 20)(250 - 10x)$

$$\text{即：} w = -10x^2 + 200x + 1250 \text{ 或 } w = -10(x - 10)^2 + 2250 (0 \leq x \leq 25)$$

(2) $\because -10 < 0$, $\therefore$ 抛物线开口向下，二次函数有最大值，

$$\text{当 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2 \times (-10)} = 10 \text{ 时，销售利润最大}$$

此时销售单价为： $10 + 25 = 35$ (元)

答：销售单价为35元时，该商品每天的销售利润最大.

(3) 由(2)可知，抛物线对称轴是直线 $x = 10$ ，开口向下，对称轴左侧 w 随 x 的增大而增大，对称轴右侧 w 随 x 的增大而减小

方案A：根据题意得， $x \leq 5$ ，则 $0 \leq x \leq 5$

当 $x = 5$ 时，利润最大

$$\text{最大利润为 } w = -10 \times 5^2 + 200 \times 5 + 1250 = 2000 \text{ (元)},$$

方案B：根据题意得， $25 + x - 20 \geq 16$,

解得： $x \geq 11$

则 $11 \leq x \leq 25$,

故当 $x = 11$ 时，利润最大，

$$\text{最大利润为 } w = -10 \times 11^2 + 200 \times 11 + 1250 = 2240 \text{ (元)},$$

$$\because 2240 > 2000,$$

$\therefore$ 综上所述, 方案B最大利润更高.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

练习

9. 某水果批发商销售每箱进价为40元的苹果, 物价部门规定每箱售价不得高于55元, 市场调查发现, 若每箱以50元的价格销售, 平均每天销售90箱, 价格每提高1元, 平均每天少销售3箱.

- (1) 求平均每天销售量 y 箱与销售价 x 元/箱之间的函数关系式.
- (2) 求该批发商平均每天的销售利润 w (元)与销售价 x (元/箱)之间的函数关系式.
- (3) 当每箱苹果的销售价为多少元时, 可以获得最大利润? 最大利润是多少?

【答案】(1) $y = -3x + 240$.

$$(2) w = -3x^2 + 360x - 9600.$$

(3) 销售价 $x = 55$ 元时, 利润 w 最大, 为1125元.

【解析】(1) $y = 90 - 3(x - 50)$, 即 $y = -3x + 240$.

$$(2) w = (x - 40)y = (x - 40)(-3x + 240) \\ = -3x^2 + 360x - 9600.$$

$$(3) w = -3x^2 + 360x - 9600$$

$$= -3(x - 60)^2 + 1200,$$

$$\because x \leq 55,$$

$\therefore$ 当销售价 $x = 55$ 元时, 利润 w 最大,

最大利润为1125元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

10. 小李在景区销售一种旅游纪念品, 已知每件进价为6元, 当销售单价定为8元时, 每天可以销售200件, 市场调查反映: 销售单价每提高1元, 日销量将会减少10件, 物价部门规定: 销售单价不能超过12元, 设该纪念品的销售单价为 x (单位: 元), 日销量为 y (单位: 件), 日销售利润为 w (单位: 元).

- (1) 求 y 与 x 的函数关系式.
- (2) 要使日销售利润为720元, 销售单价应定为多少元?
- (3)

求日销售利润 w （单位：元）与销售单价 x （单位：元）的函数关系式，当 x 为何值时，日销售利润最大，并求出最大利润．

【答案】（1） $y = 280 - 10x$ ．

（2）销售单价应定为10元．

（3）函数关系式为 $w = -10x^2 + 340x - 1680$ ，当 $x = 12$ 时，日销售利润最大为960元．

【解析】（1） $y = 200 - (x - 8) \cdot 10 = 280 - 10x$ ．

（2） $w = y \cdot (x - 6) = (280 - 10x) \cdot (x - 6)$
 $= -10x^2 + 340x - 1680$ ，

令 $w = 720$ ，即 $-10x^2 + 340x - 1680 = 720$ ．

解得： $x_1 = 24$ ， $x_2 = 10$ ，

又∵销售单价不超过12元，

∴ $x = 10$ ，即销售单价应定为10元．

（3）由（2）得 $w = -10x^2 + 340x - 1680$

$= -10(x - 17)^2 + 1210$ ，

当 $x = 17$ 时，日销售利润最大，但 $x \leq 12$ ，

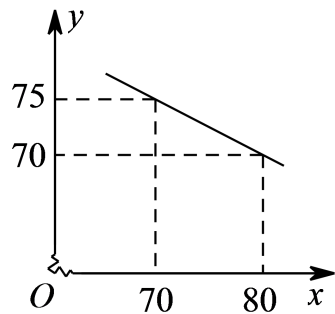
∴当 $x = 12$ 时，

最大利润 $w_{\max} = -10 \times (12 - 17)^2 + 1210 = 960$ ．

答：当 $x = 12$ 时，日销售利润最大为960元．

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

11. 为早日实现脱贫奔小康的宏伟目标，我市结合本地丰富的山水资源，大力发展旅游业，王家庄在当地政府的支持下，办起了民宿合作社，专门接待游客，合作社共有80间客房．根据合作社提供的房间单价 x （元）和游客居住房间数 y （间）的信息，乐乐绘制出 y 与 x 的函数图象如图所示．



（1）求 y 与 x 之间的函数关系式．

- (2) 合作社规定每个房间价格不低于60元且不超过150元, 对于游客所居住的每个房间, 合作社每天需支出20元的各种费用, 房价定为多少时, 合作社每天获利最大? 最大利润是多少.

【答案】 (1) y 与 x 之间的函数关系式是 $y = -0.5x + 110$.

(2) 房价定为120元时, 合作社每天获利最大, 最大利润是5000元.

【解析】 (1) 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 70k + b = 75 \\ 80k + b = 70 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} k = -0.5 \\ b = 110 \end{cases},$$

即 y 与 x 之间的函数关系式是 $y = -0.5x + 110$.

(2) 设合作社每天获得的利润为 w 元,

$$w = x(-0.5x + 110) - 20(-0.5x + 110)$$

$$= -0.5x^2 + 120x - 2200$$

$$= -0.5(x - 120)^2 + 5000$$

$$\because 60 \leq x \leq 150,$$

$\therefore$ 当 $x = 120$ 时, w 取得最大值, 此时 $w = 5000$,

$\therefore$ 房价定为120元时, 合作社每天获利最大, 最大利润是5000元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

练习

12. 某商场销售一种小商品, 每件进货价为190元. 调查发现, 当销售价为210元时, 平均每天能销售8件; 当销售价每降低2元时, 平均每天就能多销售4件. 设每件小商品降价 x 元, 平均每天销售 y 件.
- (1) 直接写出 y 与 x 之间的函数关系式 (不必写出 x 的取值范围).
- (2) 商场要想使这种小商品平均每天的销售利润达到280元, 求每件小商品的销售价应定为多少元?
- (3) 设每天的销售总利润为 w 元, 求 w 与 x 之间的函数关系式; 每件商品降价多少元时, 每天的总利润最大? 最大利润是多少?

【答案】 (1) $y = 8 + 2x$.

(2) 每件小商品的销售价应定为204元或200元时, 每天的销售利润达到280元.

(3) $w = -2(x - 8)^2 + 288$,

每件商品的降价8元时, 每天可获得最大利润, 最大的月利润是288.

【解析】 (1) $\because$ 设每件小商品降价 x 元, 平均每天销售 y 件,

$\therefore y$ 与 x 间的函数关系式为： $y = 8 + 2x$.

$$(2) (210 - 190 - x)(8 + 2x) = 280 ,$$

解得： $x_1 = 10$, $x_2 = 6$,

$\therefore$ 每件小商品的销售价应定为204元或200元时 ,

每天的销售利润达到280元 .

(3) 由题意得出：

$$w = (210 - 190 - x)(8 + 2x) = -2(x - 8)^2 + 288 ,$$

$$a = -2 < 0 ,$$

故当 $x = 8$ 时 , w 有最大值288 ,

综上所述 , 每件商品的降价8元时 , 每天可获得最大利润 , 最大的月利润是288 .

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

13. 某服装超市购进单价为30元的童装若干件 , 物价部门规定其销售单价不低于每件30元 , 不高于每件60元 . 销售一段时间后发现：当销售单价为60元时 , 平均每月销售量为80件 , 而当销售单价每降低10元时 , 平均每月能多售出20件 . 同时 , 在销售过程中 , 每月还要支付其他费用450元 . 设销售单价为 x 元 , 平均月销售量为 y 件 .

(1) 求出 y 与 x 的函数关系式 , 并写出自变量 x 的取值范围 .

(2) 当销售单价为多少元时 , 销售这种童装每月可获利1800元 ?

(3) 当销售单价为多少元时 , 销售这种童装每月获得利润最大 ? 最大利润是多少 ?

【答案】 (1) $y = -2x + 200 (30 \leq x \leq 60)$

(2) 55元 .

(3) 当销售单价为60元时 , 销售这种童装每月获得利润最大 , 最大利润是1950元 .

【解析】 (1) 由题意得： $y = 80 + 20 \times \frac{60 - x}{10}$

$\therefore$ 函数的关系式为： $y = -2x + 200 (30 \leq x \leq 60)$

$$(2) \text{由题意得：} (x - 30)(-2x + 200) - 450 = 1800$$

解得 $x_1 = 55$, $x_2 = 75$ (不符合题意 , 舍去)

答：当销售单价为55元时 , 销售这种童装每月可获利1800元 .

(3) 设每月获得的利润为 w 元 , 由题意得：

$$w = (x - 30)(-2x + 200) - 450 = -2(x - 65)^2 + 2000$$

$$\therefore -2 < 0$$

$\therefore$ 当 $x \leq 65$ 时 , w 随 x 的增大而增大

$$\therefore 30 \leq x \leq 60$$

$$\therefore \text{当 } x = 60 \text{ 时, } w_{\text{最大}} = -2(60 - 65)^2 + 2000 = 1950$$

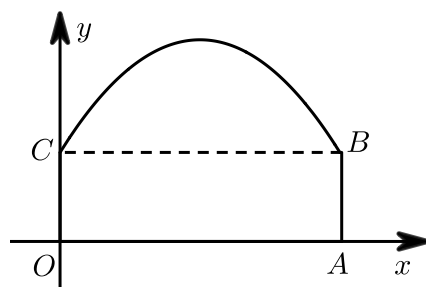
答：当销售单价为60元时，销售这种童装每月获得利润最大，最大利润是1950元。

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

三、拱桥问题

练习

14. 如图，隧道的截面由抛物线和长方形OABC构成，长方形的长OA是12m，宽OC是4m，按照图中所示的平面直角坐标系，抛物线可以用 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 表示。在抛物线型拱壁上需要安装两排灯，使它们离地面的高度相等，如果灯离地面的高度不超过8m，那么两排灯的水平距离最小是（ ）。



A. 2m

B. 4m

C. $4\sqrt{2}$ m

D. $4\sqrt{3}$ m

【答案】D

【解析】由题意得 $C(0, 4)$ ， $B(12, 4)$ ，

且 B ， C 都经过抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4 = c \\ 4 = -\frac{1}{6} \times 12^2 + b \times 12 + c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x + 4$ ，

当灯离地面高8m时，两排灯的水平距离最小，

$\therefore y = 8$ 时，

$$8 = -\frac{1}{6}x^2 + 2x + 4,$$

$$\text{解得: } x_1 = 6 + 2\sqrt{3}, x_2 = 6 - 2\sqrt{3},$$

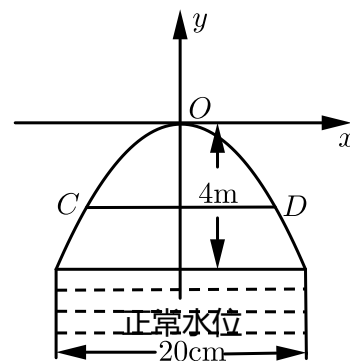
$$x_1 - x_2 = 4\sqrt{3},$$

所以两排灯的水平距离最小是 $4\sqrt{3}\text{m}$.

故选D .

【标注】【知识点】二次函数的其他实际问题

15. 在一座抛物线型拱桥，正常水位时，桥下水面宽度为20m，拱顶距水面4m，此时，桥下的水深为2m，位保证过往船只顺利航行，桥下水面宽度不得小于18m，求水深超过多少米时，就会影响过往船在桥下顺利航行？



【答案】 2.76米 .

【解析】 令解析式为 $y = ax^2 (a \neq 0)$,

由题意知，代入 $(10, -4)$,

$$-4 = 100a ,$$

$$a = -\frac{1}{25} ,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{25}x^2 ,$$

$$\text{当 } x = 9 \text{ 时, } y = -\frac{1}{25} \times 9^2 = -\frac{81}{25} ,$$

$$2 + 4 - \frac{81}{25} = 2\frac{19}{25} = 2.76 \text{ 米} ,$$

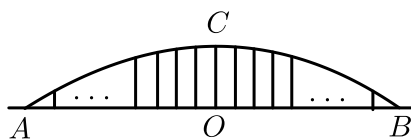
答：水深超过2.76米时会影响航行 .

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

16. 图①中是一座钢管混凝土系杆拱桥，桥的拱肋ACB可视为抛物线的一部分（如图②），桥面（视为水平的）与拱肋用垂直于桥面的系杆连接，测得拱肋的跨度AB为200米，与AB中点O相距20米处有一高度为48米的系杆 .



图①



图②

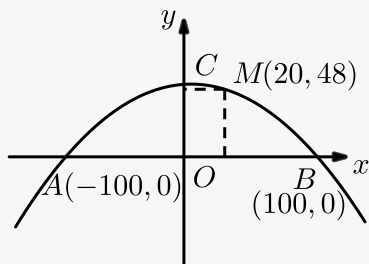
(1) 求正中间系杆 OC 的长度.

(2) 若相邻系杆之间的间距均为5米(不考虑系杆的粗细), 则是否存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半? 请说明理由.

【答案】 (1) 50m .

(2) 不存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半, 证明见解析.

【解析】 (1) 如图所示, 以点 O 为原点, OB 所在直线为 x 轴,



OC 所在直线为 y 轴建立空间直角坐标系,

$\because AB = 200$ 米, 与 AB 中点 O 相距20米处有一高度为48米的系杆,

$\therefore$ 由题意可知: $B(100, 0)$, $M(20, 48)$,

设该抛物线对应的函数关系式为: $y = ax^2 + c$,

$$\text{则: } \begin{cases} 10000a + c = 0 \\ 400a + c = 48 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{200} \\ c = 50 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{200}x^2 + 50,$$

$\therefore$ 正中间系杆 OC 的长度为50m .

故答案为: 50m .

(2) 设存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半, 即为25米,

$$\text{则 } 25 = -\frac{1}{200}x^2 + 50,$$

$$\text{解得 } x = \pm 50\sqrt{2},$$

$\because$ 相邻系杆之间的间距均为5米,

$\therefore$ 每根系杆上点的横坐标均为整数,

$x = \pm 50\sqrt{2}$ 与实际不符,

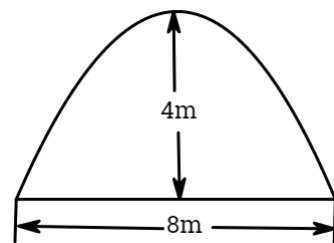
∴不存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半．

【标注】【知识点】建立平面直角坐标系解抛物线的实际问题

练习

17. 解答：

- (1) 一辆宽2米的货车要通过跨度为8米，拱高为4米的单行抛物线隧道（从正中通过），为保证安全，车顶左右两侧离隧道的垂直距离至少要0.5米，求货车的限高为多少？

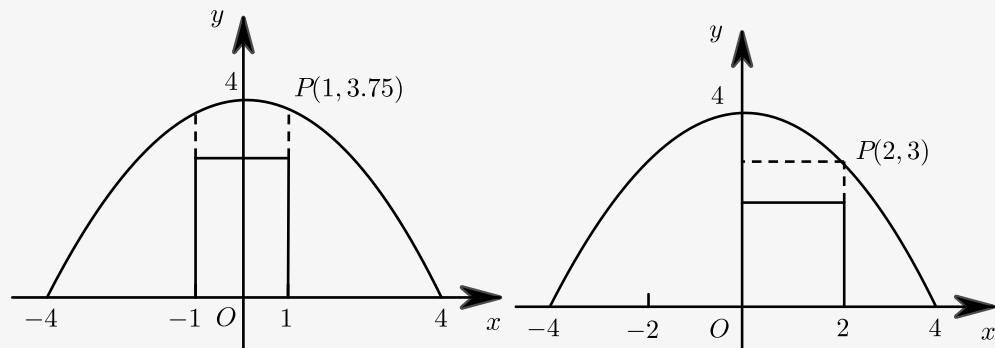


- (2) 若将(1)中的单行道改为双行道，即货车必须从隧道中线的右侧通过，求货车的限高应是多少？

【答案】 (1) 3.25米．

(2) 2.5米．

【解析】 (1) 建立如图所示坐标系，



∴抛物线的顶点坐标是 $(0, 4)$ ，

∴可设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4$ ．

又∵抛物线过 $(4, 0)$ 点，∴ $0 = a \times 4^2 + 4$ ，

$$\therefore a = -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad (-4 \leq x \leq 4)$$

当 $x = 1$ 时， $y = 3.75$ ．

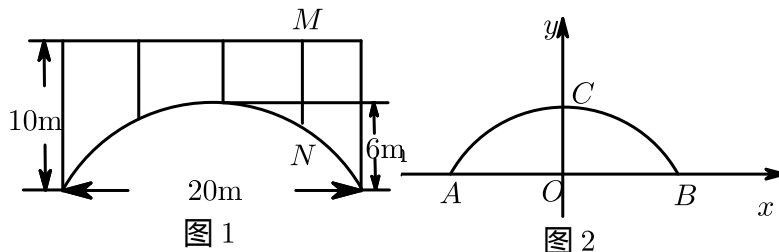
∴货车限高为 $3.75 - 0.5 = 3.25$ （米）．

(2) 当 $x = 2$ 时, $y = 3$,

故货车限高为 $3 - 0.5 = 2.5$ (米) .

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

18. 一座拱桥的轮廓是抛物线型(如图1所示), 拱高6m, 跨度20m, 相邻两支柱间的距离均为5m .



- (1) 将抛物线放在所给的直角坐标系中(如图2所示), 其表达式是 $y = ax^2 + c$ 的形式. 请根据所给的数据求出 a , c 的值 .
- (2) 求支柱 MN 的长度 .
- (3) 拱桥下地平面是双向行车道(正中间是一条宽2m的隔离带), 其中的一条行车道能否并排行驶宽2m、高3m的三辆汽车(汽车间的间隔忽略不计)? 请说说你的理由 .

【答案】(1) $a = -\frac{3}{50}$, $c = 6$.

(2) 支柱 MN 的长度是5.5米 .

(3) 一条行车道能并排行驶这样的三辆汽车 .

【解析】(1) 根据题目条件, A 、 B 、 C 的坐标分别是 $(-10, 0)$ 、 $(10, 0)$ 、 $(0, 6)$.

将 B 、 C 的坐标代入 $y = ax^2 + c$, 得 $\begin{cases} 6 = c \\ 0 = 100a + c \end{cases}$

解得 $a = -\frac{3}{50}$, $c = 6$.

所以抛物线的表达式是 $y = -\frac{3}{50}x^2 + 6$.

(2) 可设 $N(5, y_N)$, 于是 $y_N = -\frac{3}{50} \times 5^2 + 6 = 4.5$.

从而支柱 MN 的长度是 $10 - 4.5 = 5.5$ 米 .

(3) 设 DE 是隔离带的宽, EG 是三辆车的宽度和, 则 G 点坐标是 $(7, 0)$,

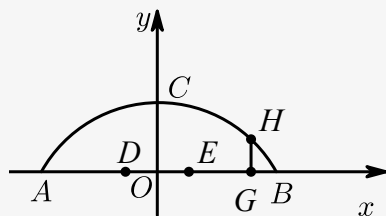


图 2

$(7 = 2 \div 2 + 2 \times 3)$.

过 G 点作 GH 垂直 AB 交抛物线于 H ，则 $y_H = -\frac{3}{50} \times 7^2 + 6 = 3 + \frac{3}{50} > 3$ 。

根据抛物线的特点，可知一条行车道能并排行驶这样的三辆汽车。

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

四、轨迹问题

练习

19. 运动会上，某运动员掷铅球时，所掷的铅球的高 $y(\text{m})$ 与水平的距离 $x(\text{m})$ 之间的函数关系式为

$$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, \text{ 则该运动员的成绩是 () .}$$

A. 6m

B. 12m

C. 8m

D. 10m

【答案】D

【解析】令 $y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$,

$$\text{整理得: } x^2 - 8x - 20 = 0,$$

$$(x - 10)(x + 2) = 0,$$

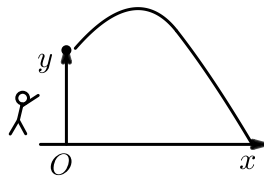
$$\text{解得 } x_1 = 10, x_2 = -2 \text{ (舍去)},$$

答：该运动员此次掷铅球的成绩是10m。

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

20. 一名男生推铅球，铅球行进高度 y （单位：m）与水平距离 x （单位：m）之间的关系是

$$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, \text{ 铅球运行路线如图.}$$



(1) 求铅球推出的水平距离。

(2) 求铅球行进的最大高度。

【答案】(1) 10米。

(2) 最大高度为3m。

【解析】(1) 当 $y = 0$ 时, $-\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$,

解之得 $x_1 = 10$, $x_2 = -2$ (不合题意, 舍去),

所以推铅球的水平距离是10米.

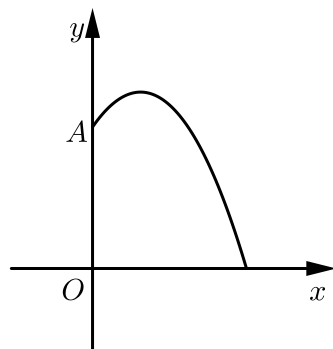
$$\begin{aligned}(2) \quad y &= \frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, \\&= -\frac{1}{12}(x^2 - 8x + 16 - 16 + \frac{5}{3}), \\&= -\frac{1}{12}(x^2 - 8x + 16) + \frac{5}{3} + \frac{4}{3}, \\&= -\frac{1}{12}(x - 4)^2 + 3,\end{aligned}$$

当 $x = 4$ 时, y 取最大值3,

所以铅球行进的最大高度为3m.

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

21. 如图是某公园一喷水池, 在水池中央有一垂直于地面的喷水柱, 喷水时, 水流在各方向沿形状相同的抛物线落下. 若水流喷出的高度 $y(\text{m})$ 与水平距离 $x(\text{m})$ 之间的函数关系式为 $y = -(x - 1)^2 + 2.25$.



- (1) 求喷出的水流离地面的最大高度.
(2) 求喷嘴离地面的高度.
(3) 若把喷水池改成圆形, 那么水池半径至少为多少时, 才能使喷出的水流不落在水池外?

【答案】(1) 2.25m.

(2) 1.25m.

(3) 2.5m时.

【解析】(1) $\because$ 水流喷出的高度 $y(\text{m})$ 与水平距离 $x(\text{m})$ 之间的函数关系式为

$$y = -(x - 1)^2 + 2.25,$$

$\therefore$ 喷出的水流离地面的最大高度为: 2.25m.

(2) 当 $x = 0$, 则 $y = -(0 - 1)^2 + 2.25 = 1.25(\text{m})$,

答：喷嘴离地面的高度为1.25m .

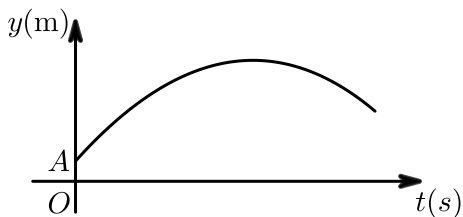
(3) 由题意可得； $y = 0$ 时， $0 = -(x - 1)^2 + 2.25$ ，

解得： $x_1 = -0.5$ ， $x_2 = 2.5$ ，

答：水池半径至少为2.5m时，才能使喷出的水流不落在水池外 .

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

22. 如图，某足球运动员站在点O处练习射门，将足球从离地面0.5m的A处正对球门踢出（点A在y轴上），足球的飞行高度y（单位：m）与飞行时间t（单位：s）之间满足函数关系 $y = at^2 + 5t + c$ ，已知足球飞行0.8s时，离地面的高度为3.5m .



(1) 足球飞行的时间是多少时，足球离地面最高？最大高度是多少？

(2) 若足球飞行的水平距离x（单位：m）与飞行时间t（单位：s）之间具有函数关系 $x = 10t$ ，已知球门的高度为2.44m，如果该运动员正对球门射门时，离球门的水平距离为28m，他能否将球直接射入球门？

【答案】 (1) 足球飞行的时间是 $\frac{8}{5}$ s时，最大高度是 $\frac{9}{2}$ m .

(2) 他能将球直接射入球门 .

【解析】 (1) 由题意得：函数 $y = at^2 + 5t + c$ 的图象经过(0, 0.5)，(0.8, 3.5)，

$$\therefore \begin{cases} 0.5 = c \\ 3.5 = 0.8^2 a + 5 \times 0.8 + c \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -\frac{25}{16} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为：} y = -\frac{25}{16}t^2 + 5t + \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{当} t = \frac{8}{5} \text{时，} y_{\max} = \frac{9}{2}.$$

$$\therefore \text{足球飞行的时间是} \frac{8}{5} \text{s时，最大高度是} \frac{9}{2} \text{m}.$$

(2) 把 $x = 28$ 代入 $x = 10t$ 得 $t = 2.8$ ，

$$\therefore \text{当} t = 2.8 \text{时，} y = -\frac{25}{16} \times 2.8^2 + 5 \times 2.8 + \frac{1}{2} = 2.25 < 2.44,$$

$\therefore$ 他能将球直接射入球门 .

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

